



ГЕОДЕЗИЯ

528.2:514.01

DOI: 10.22389/0016-7126-2019-950-8-2-11

К вопросу о доказательстве пятого постулата Евклида и происхождении неевклидовых геометрий

© ¹Толчельникова С. А., ²Наумов К. Н., 2019

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН
196140, Россия, г. Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, д. 65

²АО «Сибтехэнерго»

630032, Россия, г. Новосибирск, ул. Планировочная, д. 18/1

¹stolchelnikova@gmail.com

²knaumov@mail.ru

Геометрия Евклида сформировалась как математическая система в результате обобщения тысячелетнего опыта измерений на плоскости и на поверхности сферы. Развитие небесной механики и звёздной астрономии подтвердило её необходимость в качестве математического основания естествознания. В неевклидовых геометриях Лобачевского и Римана заменяются соответственно одна и две аксиомы современных руководств по геометрии. Уточняя представления о прямой линии и лучах света, мы доказываем, что третья аксиома этих руководств является следствием пятого постулата Евклида. Представление о сферическом, римановом пространстве Вселенной и локальных искривлениях пространства, зависящих от массы тела, внедрялось в небесную механику, астрономию и геодезию вместе с теорией относительности, математический аппарат которой был создан из неизмеряемых величин: пространства с числом измерений больше трёх, мнимого времени и неразделимого пространства-времени. Поэтому внедрение теории относительности оказалось неприемлемым для астрономии.

Евклид, неевклидовы геометрии, параллельные прямые, параллаксы звёзд.

Для цитирования: Толчельникова С. А., Наумов К. Н. К вопросу о доказательстве пятого постулата Евклида и происхождении неевклидовых геометрий // Геодезия и картография. – 2019. – Т. 80. – № 8. – С. 2–11. DOI: 10.22389/0016-7126-2019-950-8-2-11

Введение

Появление в математике XIX в. неевклидовой геометрии не случайно совпало с пробуждением массового интереса к определениям расстояний до звёзд. Возникли предположения о возможном отличии геометрии межзвёздного пространства от геометрии Евклида. Такое мнение высказал, например, ещё в 1818 г. немецкий юрист Швейкарт в письме к Гауссу. В XX в. неевклидова геометрия была востребована Эйнштейном и его последователями физиками-теоретиками, им потребовались пространства с числом измерений больше трёх, например, в теории суперструн, а также Великого объединения,

которое популяризировалось в передаче «Очевидное невероятное». До отрицания геометрии Евклида дело всё-таки не дошло, хотя, рассуждая о координатных системах, Эйнштейн писал, что «допуская равноправное существование неинерциальных систем, мы должны отказаться от евклидовой геометрии» [15, с. 85], а М. Борн одну из глав своей книги «Эйнштейновская теория относительности» назвал «Крах евклидовой геометрии» [1].

Внедрение специальной и общей теории относительности (СТО и ОТО) не повлияло на практику измерения звёздных параллаксов и почти не отразилось на развитии звёзд-

ной астрономии – сравнительно молодой отрасли астрометрии. Возникшие противоречия (непонимание) между теоретиками и практиками преодолеваются изучением истории. Следуя примеру античных греков начинать исследование *ab ovo*, обратимся к первоисточнику – к переводу труда Евклида «Начала» [10].

Определения, аксиомы и постулаты геометрии Евклида

В «Началах» Евклида в разделе «Определения» под номером 23 написано: «Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются» [10, с. 14]. За разделом «Определения» следует раздел «Постулаты», затем «Аксиомы». Обратим внимание на пятый постулат, ему предшествуют определения (дефиниции) плоских углов, прямого, острого и тупого, что логически оправдано – начальные понятия, появляющиеся в постулатах, должны быть ясны тем, кто обращается к геометрии. Пятый постулат называет условия, при которых прямые встретятся – окажутся непараллельными: «И если прямая, падающая на две прямые, образует по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то неограниченно продолженные эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых» [10, с. 15]. Отсюда следует: если упомянутые углы равны двум прямым, то прямые не встретятся, окажутся параллельными в соответствии с определением 23. Комментарием текста Евклида отмечено, что пятый постулат может рассматриваться так же как аксиома, тогда ему придётся присвоить номер 11.

Ещё в Античности искали либо доказательство пятого постулата, либо замену его утверждениям, которое, удовлетворяя определениям Евклида и сохраняя те же следствия, могло бы первенствовать в качестве наиболее очевидного. Так, Коперник ссылался на Посидония Родосского: «...согласно определению Посидония, параллельными называются линии, которые идут, не

удаляясь и не приближаясь друг к другу, и образуют равные отрезки на проведённых к ним в любых местах перпендикулярах» [7, с. 87]. Возражение против принятия формулировки Посидония в качестве постулата заключалось в том, что она требовала следующего доказательства: геометрическое место вершин равных перпендикуляров, восстановленных из точек одной прямой к другой, будет также прямой линией.

Формулировка Посидония не противоречит определению 23 Евклида, она интересна тем, что на практике параллельность линий, лежащих примерно на одной плоскости, проверяется именно посредством измерения расстояний между ними, например, между сторонами дорог, домов, каналов, между рельсами и т. д. В отличие от определения 23 Евклида, у Посидония отсутствует упоминание о поведении параллельных линий, продолженных неограниченно. Полагаем, что происхождение аксиоматики геометрии Евклида связано с практикой длительного исторического периода, когда учёные (астрономы и геодезисты) определяли положения на плоскости и на сферических поверхностях Земли и небосвода, но не в пространстве.

Для наглядного представления античные учёные использовали чертежи как с прямыми линиями, так и с разнообразными коническими сечениями; строители и архитекторы заботились о том, чтобы стены строений были плоскими поверхностями, ограждающими плоское пространство, подобно тому, как у Евклида прямолинейные фигуры ограждены прямыми линиями (определение 19). Если фигура не прямолинейная, то она ограждена искривлённой линией, например, круг ограждён окружностью (определения 15–17). В комментариях [10, с. 12] поясняется, что взамен греческого понятия «фигура» в латинском языке появляются два слова: «фигура» и «форма», – последнее относится к телам в пространстве. Слова «пространство» нет ни в определениях, ни в постулатах и аксиомах Евклида. Непревзойдённое искусство архитекторов и ваятелей Эллады, по-видимому, не объяснить расчётом по точным формулам – гармонию не проверяли алгеброй.

О неевклидовых геометрических системах, имеющих отношение к астрономии

К тексту Евклида обращаются только историки науки, а для тех, кто учит геометрию, источником являются современные руководства, в которых общей чертой неевклидовых геометрий считается замена пятого постулата Евклида, якобы утверждающего, что через одну точку можно провести только одну прямую, параллельную данной. Из приведённого текста Евклида видно, что это утверждение отличается от пятого постулата.

Далее в изложении темы этого раздела мы во многом следуем за выдающимся геометром рубежа XIX–XX вв. Анри Пуанкаре, который, останавливаясь на аксиомах, относящихся к геометрии, писал: «Большинство руководств излагают три такие аксиомы:

1. Между двумя точками можно провести лишь одну прямую.

2. Прямая есть кратчайшее расстояние между точками.

3. Через данную точку можно провести лишь одну прямую, параллельную данной» [12, с. 32].

Пуанкаре связывает появление неевклидовых геометрий с долгими и бесплодными поисками доказательства третьей из приведённых выше аксиом: «Долгое время тщетно искали доказательства третьей аксиомы, известной под названием постулата Евклида». Огромное количество доказательств поступало ежегодно, но после того, как Н. И. Лобачевский и Я. Бойяи «установили неопровержимо, что это доказательство невозможно... парижская Академия наук получает не более одного-двух новых доказательств в год» [12, с. 32].

Лобачевский заменил третью аксиому из современных руководств предположением: через данную точку можно провести множество прямых, параллельных данной. Пуанкаре утверждает, что кроме этой, все другие аксиомы Евклида Лобачевским сохранены и что непогрешимая логика геометрии Лобачевского ничем не уступает евклидовой геометрии [12, с. 33]. Лобачевский доказал теоремы новой геометрии, показав, что

сумма углов треугольника Σ оказывается меньше двух прямых и абсолютная величина разности $\Sigma - 180^\circ$, называемая дефектом треугольника, пропорциональна его площади. Пуанкаре считал, что после того, как Бельтрами представил геометрию Лобачевского для *пространства двух измерений*, т. е. для поверхности, возражения, направленные против геометрии Лобачевского, оказались опровергнутыми. Он описал поверхность Лобачевского как гибкую и нерастяжимую, где линии могут изменять форму, не изменяя длины [12, с. 35].

Математик Л. И. Брылевская связывает геометрию Лобачевского с его поисками абсолютной единицы длины [3]. Лобачевский разработал способ определения дефекта треугольника в пространстве своей геометрии. Верный своему правилу обращаться к природе за ответом, он пытался определить дефект для большого космического треугольника, используя полученные к тому времени значения параллаксов звёзд [4, с. 416]. Лобачевский предположил, что существование предельного (конечного) значения параллакса позволит найти абсолютную единицу длины. Заметим, что единица для перехода к расстояниям по измерениям параллаксов звёзд была выбрана позднее.

К сожалению, Лобачевский не пояснил, что заставило его прекратить поиски приложения своей геометрии: появление новых, более точных и меньших по величине значений параллаксов звёзд или простая идея зависимости параллактического угла от базиса, с которого проводятся наблюдения. Так или иначе, убедившись в бесплодности попыток, Лобачевский с 1837 г. в публикациях стал называть свою геометрию воображаемой [16]. Он считал, что его геометрия, «оставаясь без употребления для измерений... открывает новое обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики». Пуанкаре упоминает о той пользе, которую он и Ф. Клейн извлекли из геометрии Лобачевского при интегрировании линейных уравнений [12, с. 36].

Следующий шаг был сделан Риманом. В мемуаре «О гипотезах, лежащих в основа-

нии геометрии» (1868 г.) он показал возможность построения бесчисленного множества геометрий. Та геометрия, которую обычно называют именем Римана, является распространением сферической геометрии, известной и используемой ещё в Античности, на трёхмерное пространство. Поверхность Римана – это новое название сферической поверхности с положительной и постоянной кривизной; избыток сферического треугольника (превышение суммы углов над 180°) пропорционален его площади. Для геодезических треугольников избыток вычисляется достаточно точно по приближённым значениям координат их вершин.

Риман заменил третью аксиому допущением *о невозможности проведения через точку ни одной прямой, параллельной данной*. Пуанкаре заметил, что кроме постулата Евклида (а точнее, *кроме третьей аксиомы новых руководств по геометрии*) Риман заменил также первую аксиому руководства: через две точки можно провести только одну прямую. На сфере через две точки можно провести только один большой круг, но если точки являются концами одного диаметра, то через них можно провести бесчисленное множество больших кругов. Следовательно, в геометрии Римана не только заменена третья аксиома, но также существует бесконечное множество (равное числу диаметров) нарушений первой аксиомы современных руководств.

Геометрия Римана на сферической поверхности не нуждается в комментариях – на сфере все линии имеют кривизну. На вопрос о допустимости отождествления прямой с окружностью, частью которой является дуга большого круга, математики отвечают, что в пространстве Римана эта дуга играет роль прямой линии, поскольку она служит для определения кратчайшего расстояния на сфере. Это известно из сферической геометрии, которая является ветвью геометрии Евклида. В современной математике плоские и искривлённые поверхности называют пространством двух измерений, линии, прямые и изогнутые – пространством одного измерения. Переименование не внесло ясности.

Соотношения между углами и линиями геометрии Евклида и Римана совпадают *только в сферическом* пространстве двух измерений. В римановом пространстве трёх измерений нет ни плоскостей, ни прямых, поэтому недостаточно замены одной-двух аксиом, чтобы эта геометрия стала математической системой, не содержащей внутренних противоречий. Необходимо создание неевклидовой аксиоматики с определениями углов, линий и зависимости между ними. Кроме того, поскольку пространство Римана искривлённое, придётся допустить существование четвёртого измерения. «Умы, не отрицающие пространства четырёх измерений, не увидят в этом никакой трудности, но таковых немного», – писал Пуанкаре [12, с. 35].

Доказать существование пространства с числом измерений больше трёх невозможно, поэтому доказательство заменили аналогией. Насколько известно авторам, первая попытка преодоления трудности восприятия искривлённого пространства была предпринята Клиффордом [6], который пользовался аналогией, поясняя, что одномерное существо (бесконечно тонкий червяк), двигаясь по замкнутой линии, не заметит её кривизны и конечности, а двумерное существо (бесконечно тонкая камбала), двигаясь по гладкой сферической поверхности, не обнаружит ни её кривизны, ни конечности. Аналогию Клиффорда повторили Пуанкаре [12, с. 33–34] и Эйнштейн, затем её подхватило многоголосое эхо популярной литературы. В природе существуют только трёхмерные предметы и существа, как бы малы они ни были. Следовательно, читателей приучают к фантастическому миру, но математики обещают взамен практического обоснования сохранение безупречной логики и математической точности. Выполняют ли они это обещание?

Если геометрию Лобачевского не пытались внедрять в естествознание, то появление теории относительности сопровождалось внедрением пространства Римана в астрономию. Эйнштейн писал: «Из последних результатов теории относительности представляется вероятным, что наше трёхмерное пространство также является *приблизитель-*



но сферическим (курсив наш – С. Т., К. Н.), т. е. что законы расположения в нём твёрдых тел определяются не евклидовой геометрией, а приближённо описываются сферической геометрией, если только рассматривать области достаточно большой протяжённости» [15, с. 91]. В довершение процесса, называемого физикализацией геометрии, Эйнштейн призывал: «...мы должны лишить геометрию её формально-логического характера, сопоставив пустой (sic!) схеме понятий аксиоматической геометрии *реальные объекты нашего опыта*». [15, с. 85]. Действительно, внедрение искривлённого пространства в небесную механику лишило её возможности логического развития на основе *геометрического* фундамента «Математических начал натуральной философии» Ньютона. Предлагаемый физический фундамент привёл к проблемам, во-первых, с использованием двумерных образований в качестве *реальных объектов опыта физиков, т. е. экспериментов*, во-вторых, с возможностью расположения бесконечного множества трёхмерных твёрдых тел даже в ограниченном объёме четырёхмерного пространства.

Можно добавить, что на протяжении века физики-релятивисты не определили заявленной ими кривизны пространства Вселенной. Возможно, они ждали достижения «области достаточно большой протяжённости», не зная, что кривизна уменьшается по мере увеличения объёма, следовательно, она всегда останется неизвестной. Массовый читатель, согласившийся на переселение в фантастический мир и на отказ от логики, становится доверчивым, не требует доказательств. Не случайно появляются публикации, например книга [5], призванные убедить читателя в том, что зрение часто нас обманывает.

Наука Античности и эпохи Возрождения не призывала людей к отказу от доверия зрению и другим органам чувств, но искала объяснения, причины каждого из наблюдаемых явлений и призывала к поиску гармонии в природе, как и в человеке, который является мерой всех вещей (Протагор). Коперник в своей великой книге ссылается на геометрию Евклида и законы оптики.

Распространение света и законы геометрической оптики

В современной литературе нет единого мнения о том, что называют астрономы прямой линией. Пуанкаре писал: «То, что астрономы называют прямой линией, есть просто траектория светового луча» [12, с. 54]. Эйнштейн, соглашаясь с этим [15, с. 85], одновременно писал об искривлении световых лучей, пытаясь утвердить идею искривления пространства, необходимую в ОТО. Свет распространяется во все стороны от источника излучения, и выделить какое-либо направление невозможно без наблюдателя. Наука о взаимодействии излучения и зрения человека называется оптикой. В космосе прямая отождествляется с направлением, которое является *указанием* на место, поэтому искривлённым не может быть, и в математике обозначается вектором.

История свидетельствует, что художники эпохи Возрождения овладели искусством перспективы; в XVII в. появились телескопы, началось развитие геометрической оптики. Используя оптические приборы, человек стал более зорким. Люди поняли, что зрение их не обманывает, если им известны законы перспективы: мы видим, что деревья далёкого леса смыкаются, железнодорожные рельсы сходятся, но из опыта знаем о существовании промежутков между деревьями и о параллельности рельсов; умеем вычислить положение начала – источника роя метеоров, практически параллельно падающих на землю.

Измерить направление невозможно, но можно его *определить* с помощью измерений углов. Например, направление на небесное тело определяют с помощью измерения углового расстояния между видимым местом светила и направлением отвеса, либо началом отсчёта на измерительном приборе, либо направлением на небесное светило или звёзды, выбор которых обеспечивает связь между многими наблюдателями. Направление не отождествимо с траекторией луча от источника излучения до наблюдателя. Направление на светило искажается по-разному, когда свет проходит через атмосферу

Земли и других планет, через неоднородную среду, например, диффузные области космического пространства. Видимые направления приходится исправлять, т. е. вводить поправки в измеренные значения углов. Поправку, учитывающую изменение направления на видимое место, часто называют поправкой за искривление луча, гипотезы об искривлении пространства при этом не требуется.

Астрономы фиксируют не траекторию воображаемого луча от тела звезды до наблюдателя, но *направление на место звезды на поверхности небесной сферы*, которое не совпадает с направлением на тело звезды, невидимое в момент её наблюдения. Скорость света конечна, и звёзды движутся не только по лучу зрения, но и в тангенциальной плоскости. Сферические координаты тела звезды и её изображения не совпадают, потому что пока свет доходит до наблюдателя, звезда и наблюдатель перемещаются. Только для сравнительно близких звёзд с уже известными расстояниями, а также тангенциальными скоростями астрономы могут вычислить сферические координаты тела звезды на момент наблюдения. Чтобы различать место звезды на сфере и её положение в пространстве, последнее называют её геометрическим местом. На этом месте изображение звезды появится позже, можно вычислить промежуток времени и, дождавшись момента, проверить правильность значений поправок, использованных при вычислении геометрического места звезды.

Итак, опыт звёздной астрономии свидетельствует: *фиксируемое направление на видимое место звезды не отождествимо с направлением на её геометрическое место*. Пока неизвестными оставались расстояния до звёзд, астрономы могли определять только сферические координаты их мест, или проекций на воображаемую небесную сферу. Отвергнув модели Мира с хрустальными сферами, разрушив последнюю из них в качестве границы Вселенной, астрономы сохранили воображаемую сферу неопределённого радиуса – сферу звёздных каталогов и эфемерид. На неё проектируют не только все небесные объекты, наблюдаемые как в

оптическом, так и в других диапазонах, но и зениты пунктов, откуда выполняют наблюдения.

Развитию античной науки способствовали опыты измерений на поверхности Земли и на небесной сфере, откуда родилась сферическая геометрия, известная в Античную эпоху, значительный вклад в её развитие внесли учёные арабского мира, а затем Европы. В «Рассуждении о методе» Декарт пояснил, как опыт с твёрдыми телами привёл его к идее пространства трёх измерений [9]. С Декартом согласен Пуанкаре: «... вот что геометрия заимствовала у опыта: свойства твёрдых тел» [12, с. 40]. Созданием науки, определяющей движения в пространстве Солнечной системы, мы обязаны тем учёным эпохи Коперника – Ньютона, которые владели не только опытом нового времени, но и наследием Античности и на основе трудов Евклида, Аполлония и Архимеда создали классическую механику, единую для земного и небесного мира. В отличие от них организаторов «великой научной революции в физике XX в.» интересовали только новейшие эксперименты физиков. Эйнштейн, как известно, считал созданные им СТО и ОТО «итогом борьбы с представлениями Галилея и Ньютона» [15, с. 796].

Геометрия Евклида как основа определения расстояний во Вселенной

С начала XX в. создают модели, описывающие движения звёзд в Галактике; к этому времени определения расстояний до звёзд уже систематически проводили в обсерваториях. В учебнике П. П. Паренаго приведены сведения об истории определения годичных параллаксов звёзд абсолютным методом – по измерениям углов, прилегающих к базису, – и относительным методом, с меньшими ошибками [11, с. 27–43]. В последнем случае годичное смещение близкой звезды измеряют относительно опорных, более далёких звёзд, которые не обнаруживают параллактических смещений. При этом в значениях определяемых параллаксов появляются систематические, так называемые космические, ошибки, которые могут быть

определены в будущем, когда доступными станут значения параллаксов более далёких звёзд, служивших опорными. Этот вопрос подробно рассмотрен в статье [13].

Связь с методом определения земных расстояний в геодезии ясна из рисунка. Переход от углов AS_iO к расстояниям R_i до звёзд осуществляется по формуле

$$\sin \pi_i = a/R_i,$$

где a – известный радиус орбиты Земли; π_i – параллаксы, равные половине углов при вершинах равнобедренных треугольников AS_iB .

В мире звёзд расстояния измеряют в парсеках, 1 пк обратно пропорционален углу, равному $1''$. Параллакс ближайшей звезды Проксима Центавра равен $0,75''$, что соответствует расстоянию 1,3 пк, или $2,7 \cdot 10^5$ а.е., или $4 \cdot 10^{13}$ км, или 4,5 года. Ошибка измерения такого расстояния не меньше 4 а.е. Чем меньше параллакс звезды, тем она дальше и тем больше ошибка определения расстояния до неё. Очевидно, значение расстояния ненадёжно при значении параллакса, равном ошибке его измерения, отсюда возникает граница, за которой звёзды считаются *практически* бесконечно далёкими.

История астрономии свидетельствует, что граница измеряемых расстояний удаляется не только при увеличении точности измерения углов, но и при увеличении базиса, с которого выполняют наблюдения. Например, при переходе от наблюдений с Земли на наблюдения с земной орбиты базис увеличился на 4,5 порядка – граница области с известными расстояниями стремительно отодвинулась. Когда движения, происходящие на практически бесконечном расстоянии, становятся доступными изучению, происходящее на невидимой, актуальной бесконечности остаётся в области непознанного. Историки пишут, что в средние века отличали практическую бесконечность от бесконечности актуальной. Пантеистическое мировоззрение Джордано Бруно формировалось под влиянием философии епископа Николая Кузанского (XV в.), который называл актуальную бесконечность Богом,

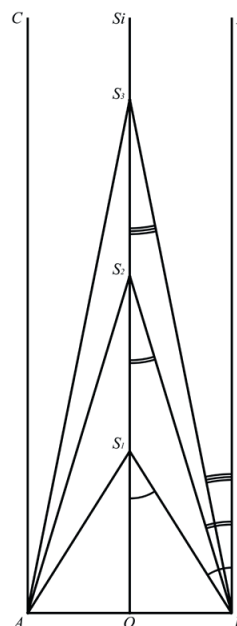


Схема определения параллактических смещений близких звёзд на фоне более далёких опорных звёзд

непознаваемым. С увеличением проникающей силы телескопов прежде недоступное становится видимым, границы актуальной бесконечности отодвигаются, но этого недостаточно для увеличения области, доступной *точно* естествознанию. Эта область кончается там, где параллактические смещения звёзд обращаются в нуль, и за ней следует область гипотез.

Опыт звёздной астрономии и геометрия Евклида

Несмотря на усиленные попытки внедрения СТО и ОТО в астрометрию и небесную механику, о чём свидетельствуют статьи и учебники, например [2, 8, 17], специалисты, связанные с практической астрометрией и геодезией, безусловно, присоединятся к словам Пуанкаре, что «евклидовой геометрии нечего опасаться новых опытов» [12, с. 54]. Пуанкаре называет аксиомы геометрии «не более чем замаскированными определениями» [12, с. 41]. Определения не требуют доказательств, они предназначены для установления связи между начальными понятиями, которые не подлежат определению через что-либо более простое; эти абстрактные понятия (точка, линия и т. д.)

являются идеализацией объектов, послуживших их материальными прообразами, способствовавшими созданию идеальных понятий, необходимых в математике [14]. Идеализация, будучи следствием использования индуктивного метода для обобщения опыта тысячелетий, происходила постепенно, известно, что в Греции до Евклида учебником геометрии служили «Элементы» Гиппократы Хиосского.

Анализ текста Евклида убеждает, что третья из приведённых Пуанкаре аксиом руководства по геометрии не входит в аксиоматику Евклида, хотя она связана с пятым постулатом. Замена указанной аксиомы создателями неевклидовых геометрий не могла не поколебать пятый постулат, потому что возникла неопределённость с евклидовыми определениями углов 9–12. Как известно, зависимость между углами и сторонами треугольников на сферической поверхности более сложная, чем у плоских треугольников. Учитывая опыт астрономии, распространившей точные земные (геодезические) методы определения расстояний далеко за пределы Земли и Солнечной системы, можно доказать третью аксиому из руководств по геометрии, опираясь на пятый постулат «Начал» Евклида.

Измерения параллаксов разделены по времени на полгода, выполняются в меридиане при противоположных положениях Земли на её орбите в предутренние часы и в начале ночи. На рисунке показаны направления на места звёзд S_i , которые соответствуют двум положениям земного наблюдателя относительно Солнца (точка O) во время этих наблюдений. Следовательно, места звёзд – это вершины равнобедренных треугольников с общим базисом AB , равным диаметру земной орбиты. Направления на места звёзд S_i являются прямыми, следовательно, треугольники плоские. Зная длину базиса и определив относительным методом углы $S_i = 2\pi_i$ либо измерив углы, прилегающие к базису, $S_i = 180^\circ - (S_iAB + S_iBA) = 2\pi_i$, астрономы определяют расстояния R_i по формуле $\sin \pi_i = a/R_i$.

Восстановим из точки A перпендикуляр AC к базису AB . Из точек B и O проведём

прямые BD и OE , параллельные AC . Через полгода после наблюдений из точки A астроном видит те же звёзды по направлению BD .

Пока сумма углов при основании треугольников остаётся меньше 180° , в соответствии с пятым постулатом Евклида, направления на звёзды, наблюдаемые из точек A и B , пересекаются, образуя параллактические треугольники с вершинами в точках S_i , расстояния до которых от точек A , B и O возрастают:

$$R_1 < R_2 < \dots < R_n.$$

Из параллельности AC и BD следует равенство накрест лежащих углов, которые на рисунке обозначены равным числом дужек. С увеличением расстояний углы S_i уменьшаются:

$$S_1 > S_2 > \dots > S_n,$$

где S_n – последний малый угол, ещё доступный измерениям с базиса современной эпохи.

Переходя к пределу, убеждаемся, что параллаксы звёзд обращаются в нуль в то время, когда углы A и B , прилегающие к базису, становятся прямыми, а расстояния – практически бесконечными:

$$\lim_{(A_i+B_i) \rightarrow 180^\circ} S_i = 0 \quad \lim_{S_i \rightarrow 0} R_i = \infty.$$

При этом, в соответствии с постулатом Евклида и определением 23, проведённые прямые AC и BD остаются параллельными и могут быть продолжены неограниченно.

Предположим теперь, что через точку B можно провести прямую BD' , отличную от BD . Но в таком случае сумма углов A и B становится меньше либо больше 180° , и согласно пятому постулату Евклида прямые пересекутся либо в направлении наблюдаемых звёзд, либо в противоположном. Та-ким образом, проведённая прямая BD является единственной параллельной AC , что и требовалось доказать*.

Опыт измерения земных расстояний без привлечения наблюдений звёзд остаётся

* Измерения параллаксов выполняют в меридиане либо вблизи него. Очевидно, доказательство третьей аксиомы возможно также при наклоне параллельных AC и BD к линии AB .



ограниченным – мы можем видеть предметы, находящиеся на линии горизонта, но даже с помощью телескопа не можем заглянуть за горизонт, потому что форма Земли сферическая. Направления из точек A и B в космическом плоском пространстве могут быть продолжены неограниченно, и они остаются параллельными при нулевом параллактическом смещении удалённых объектов, когда отношение R/a становится неотличимым от бесконечности. Положения более близких звёзд смещаются относительно параллельных, что позволяет определять их расстояния относительным методом. Очевидно, не только при увеличении базиса, но и при определении вековых параллаксов параллельными окажутся направления на ещё более далёкие звёзды.

Заключение

Определение 23 Евклида с упоминанием о том, что будучи *неограниченно продолженными* параллельные линии не пересекаются, не следовало из опыта измерений на земной поверхности. Кроме наблюдений звёзд, для определения земных расстояний греки имели опыт определения расстояния до Луны, используя наблюдения из разных мест Земли. Размеры земного базиса были достаточны, чтобы распределить планеты по порядку их удалённости от Земли, но не для определения расстояний до них. У эллинов – народа любознательного и одарённого безупречной логикой – было достаточно материала для обобщений.

Принципиальное различие античных геометров (философов) от авторов неевклидовых геометрий в том, что они создавали геометрию как отрасль математики, на основе освоения тысячелетнего опыта измерений на плоскости и сферах небесной и земной. *Индуктивный* метод помог им создать необходимые в математике идеальные понятия, такие как безразмерная точка; линия, имеющая одно измерение; поверхность с двумя измерениями; трёхмерное пространство [14]. В дальнейшем автор «Математических начал натуральной философии» опирался на геометрические принципы «Начала» Евклида и теорию конических сечений Аполлония.

Мысль авторов неевклидовых геометрий двигалась в противоположном направлении: они использовали *дедуктивный* метод, но не для изучения частных явлений на проверенной основе, а для отрицания одного или нескольких положений математической *системы*, уже созданной и прошедшей испытание [12, с. 33–39]. Поэтому их авторам и последователям приходилось искать практическое применение новых геометрий. Возможно, оно найдено в отраслях математики, не связанных с измерениями, например в упомянутой Пуанкаре топологии (*Analys situs*) [12, с. 30].

Замена пространства Евклида римановым сферическим пространством и локальным пространством с искривлением, зависящим от массы тела, осуществлялась посредством административных распоряжений о внедрении теории относительности в небесную механику и астрометрию. Астрометрия – это наука о методах измерения пространства и времени, и переход на неизмеряемые величины: пространства с числом измерений больше трёх, мнимое время и неразделимое пространство-время – неприемлем в астрометрии, геодезии и связанных с ними отраслях естествознания. Поэтому внедрение СТО и ОТО в астрометрию не оказалось продуктивным, а настоятельные требования использовать релятивистские поправки (рекомендованные резолюциями Международного астрономического союза) существенно затормозили развитие астрометрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М. Эйнштейновская теория относительности. – М.: Мир, 1964. – 452 с.
2. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972. – 382 с.
3. Брылевская Л. И. Исследования геометрии пространства Вселенной в работах Н. И. Лобачевского // Астрономия и история науки. По материалам V Междунар. конф. «Проблемы пространства, времени, движения». – СПб, 1999. – С. 27–31.
4. Идельсон Н. И. Этюды по истории небесной механики. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
5. Клайн М. Математика. Поиск истины. – М.: Мир, 1988. – 295 с.
6. Клиффорд В. Здравый смысл точных наук. – М.: Тип. Т-ва И. Д. Сытина, 1910. – 344 с.
7. Коперник Н. О вращении небесных сфер. – М.: Наука, 1964. – 653 с.
8. Матвей К. Э. Векторная астрометрия. – Киев: Наукова думка, 1986. – 328 с.
9. Мурри С. А. К вопросу о месте геометрии в есте-

ствознании // Проблемы пространства, времени, движения: Сб. тр. IV Междунар. конф. – СПб.: Искусство России, 1997. – С. 115–131.

10. *Начала Евклида. Т. 1.* / Пер. с греч. Д. Д. Мордухай-Балтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

11. *Паренго П. П.* Курс звёздной астрономии. – М.: ГИЗ, 1954. – 476 с.

12. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983. – 560 с.

13. *Толчельникова С. А.* К вопросу о методике определения звёздных параллаксов в проекте «Стереоскоп А» // Изв. ГАО. – 2002. – № 216. – С. 278–284.

14. *Толчельникова-Мурри С. А.* Специфика подхода к понятиям пространства и времени в математике и в астрономии // Проблемы пространства и времени в современном естествознании: Сб. статей. – Л.: ТНЦ РАН, 1991. – С. 25–55.

15. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов: В 4-х томах. Т. 2. – М.: Наука, 1965. – 878 с.

16. *Lobatschewsky N. (1837) Geometrie imaginaire.* Journal für die reine und ungewante Mathematic, 17, 4, pp. 295–320.

17. *Soffel M. H. (1989) Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy.* Berlin: Springer, 208 p.

On the question of the proof of Euclidean fifth postulate and the origin of non-Euclidean geometries

¹Tolchelnikova S. A., ²Naumov K. N.

Main (Pulkovo) astronomical observatory of the Russian Academy of sciences
196140, Russia, St. Petersburg, Pulkovskoe highway, 65

¹stolchelnikova@gmail.com ²knaumov@mail.ru

Euclidean geometry was developed as a mathematical system due to generalization of thousands years of measurements on the plane and spherical surfaces. The development of celestial mechanics and stellar astronomy confirmed its validity as mathematical principles of natural philosophy, in particular for studies of motions of the Solar System bodies and stars in the Galaxy. In the non-Euclidean geometries of Lobachevsky and Riemann, the third axiom of modern geometry manuals is substituted. We show that the third axiom of these manuals is a corollary of the Fifth Euclidean postulate. The idea of spherical, Riemannian space of the universe and local curvatures of space, depending on body mass, was inculcated into celestial mechanics, astronomy and geodesy along with the theory of relativity. The mathematical apparatus of the relativity theory was created from immeasurable quantities: a space with more than three dimensions, imaginary time and indivisible space-time. Therefore the inculcation of the theory of relativity is unacceptable into astrometry which is a science of methods of space and time measurements.

Euclid, Non-Euclidean geometries, Star parallaxes.

For citations: Tolchelnikova S. A., Naumov K. N. (2019) K voprosu o dokazatel'stve pyatogo postulata Evklida i proiskhozhdenii neevklidovykh geometrii [On the question of the proof of Euclidean fifth postulate and the origin of non-Euclidean geometries]. Geodesy and Cartography = Geodezia i kartografiya, 80, 8, pp. 2–11 (In Russian). DOI: 10.22389/0016-7126-2019-948-8-2-11

REFERENCES

1. *Born M.* Einsteinskovskaya teoriya otnositel'nosti. Moskva: Mir, 1964, 452 p. (In Russian).

2. *Brumberg V. A.* Relyativistskaya nebesnaya mekhanika. Moskva: Nauka, 1972, 382 p. (In Russian).

3. *Brylevskaya L. I.* Issledovaniya geometrii prostranstva Vselennoy v rabotakh N. I. Lobachevskogo. Astronomiya i istoriya nauki. Po materialam V Mezhdunarodnoi konferentsii «Problemy prostranstva, vremeni, dvizheniya». Sankt-Peterburg, 1999, pp. 27–31 (In Russian).

4. *Idel'son N. I.* Etyudy po istorii nebesnoi mekhaniki. Moskva: Nauka, 1975, 496 p. (In Russian).

5. *Klaim M.* Matematika. Poisk istiny. Moskva: Mir, 1988, 295 p. (In Russian).

6. *Klifford V.* Zdravyy smysl tochnykh nauk. Moskva: Tipografiya Tovarishchestva I. D. Sytina, 1910, 344 p. (In Russian).

7. *Kopernik N.* O vrashchenii nebesnykh sfer. Moskva: Nauka, 1964, 653 p. (In Russian).

8. *Marrei K. E.* Vektornaya astrometriya. Kiev: Naukova dumka, 1986, 328 p. (In Russian).

9. *Murri S. A.* K voprosu o meste geometrii v estestvoznanii. Problemy prostranstva, vremeni, dvizheniya: Sbornik trudov

IV Mezhdunarodnoi konferentsii. Sankt-Peterburg.: Iskustvo Rossii, 1997, pp. 115–131 (In Russian).

10. *Nachala Evklida. Tom 1.* Perevod s grecheskogo D. D. Mordukhai-Baltovskogo. Moskva – Leningrad: GITTL: GITTL, 1948, 448 p. (In Russian).

11. *Parenago P. P.* Kurs zvezdnoi astronomii. Moskva: GIZ, 1954, 476 p. (In Russian).

12. *Puankare A.* O nauke. Moskva: Nauka, 1983, 560 p. (In Russian).

13. *Tolchel'nikova S. A.* K voprosu o metodike opredeleniya zvezdnykh parallaksov v proekte «Stereoskop A». Izvestiya GAO, 2002, 216, pp. 278–284 (In Russian).

14. *Tolchel'nikova-Murri S. A.* Spetsifika podkhoda k ponyatiyam prostranstva i vremeni v matematike i v astrometrii. Problemy prostranstva i vremeni v sovremennom estestvoznanii: Sbornik statei. Leningrad: TNTs RAN, 1991, pp. 25–55 (In Russian).

15. *Einshtein A.* Sbranie nauchnykh trudov: V 4-kh tomakh. Tom 2. Moskva: Nauka, 1965, 878 p. (In Russian).

16. *Lobatschewsky N. (1837) Geometrie imaginaire.* Journal für die reine und ungewante Mathematic, 17, 4, pp. 295–320.

17. *Soffel M. H. (1989) Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy.* Berlin: Springer, 208 p.