

Отношение Пуанкаре и Эйнштейна к геометрии (сравнительный анализ)

Посвящается 150летию со дня рождения А.Пуанкаре

«Возьмите из науки не те многочисленные сведения, верные и неверные, которыми щедро вас снабжают, но нечто более существенное – тот метод, которым она добывает знание».
Курт Воннегут.

Введение

В ряде статей, помещенных в сборник “О науке” [9], Пуанкаре рассматривает вопросы, относящиеся к проблеме, интересовавшей математиков XIX века, а в начале XX века возбудившей также интерес физиков и философов, условно назовем ее поиском практического приложения неевклидовых геометрий. В XX веке эти геометрии использовались, главным образом, физиками-теоретиками и космологами. Космологи создали “теорию конечной, безграничной и расширяющейся Вселенной с римановым или псевдоримановым пространством”, которую в последние десятилетия XX века внесли в школьную программу и в учебники; средства массовой информации распространяли ее как выдающееся достижение астрономии, “научную картину Мира” и неотъемлемую часть современной парадигмы.

Указанная космологическая теория не могла восприниматься иначе, как на веру, поскольку не только учащиеся не обучали неевклидовым геометриям, но и от учителей не требовалось овладения математическим аппаратом этих сложных геометрий. Кроме того, к концу века преподавание астрономии в большинстве школ прекратилось, и геометрические основания астрономии были неправомерно сокращены в новых учебниках. **Учащиеся оказались лишенными представлений о началах сферической астрономии, о координатных системах, используемых астрономами, т.е. не знакомыми с основой методов измерения и математического описания пространств, предназначенных для изучения разнообразных движений на Земле и в космосе.**

Мы полагаем, что учащемуся не столь важны отрывочные сведения обо всех направлениях современных исследований (о них он сможет узнать из справочников), сколько **умение использовать методы** изучения Природы, созданные человечеством за всю его историю. Геометрия – один из важнейших методов.

Статья является продолжением исследований о роли геометрии Евклида в астрономии [11-14], о ее месте в системе естественных наук [8], о попытках Лобачевского определить кривизну пространства [2,4]. Сравнение взглядов Пуанкаре и Эйнштейна, оказавшего большое влияние на ученых XX века, можно рассматривать как дополнение к этим исследованиям. Мы полагаем, что опыт, приобретенный на пути, пройденном звездной астрономией и астрометрией в течение XX века, проливает новый свет на позиции указанных авторов. В двух первых разделах статьи мы уточним используемые понятия.

I. Неевклидовы геометрии двух и трех измерений

Математики смотрят на постулат Евклида о параллельных с точки зрения возможности построения непротиворечивой геометрии при его замене иным постулатом. При таком подходе польза неевклидовых геометрий проявляется в выполнении математических операций, например, взятии интегралов, решении систем

дифференциальных уравнений в частных производных, интегрировании линейных уравнений, на что указывали Ф. Клейн и А. Пуанкаре ([9], с.36).

Если же искать для геометрий, созданных с помощью замены постулата Евклида, практическое приложение к каким-либо объектам природы, то новая геометрия должна выступать в качестве гипотезы, подлежащей проверке. Должен быть, по крайней мере, указан опыт или наблюдения, которые помогли бы принять или отвергнуть гипотезу. Гипотеза получает шанс перейти в статус теории только в результате подтверждения многими опытами.

Некоторые математики XIX века предполагали, что *межзвездное пространство* может “подчиняться” иной геометрии, нежели евклидова. Как известно, Лобачевский – автор гиперболической геометрии с отрицательной кривизной пространства, пытался проверить это предположение на практике, о чем писали Н.И.Идельсон [4] и Л.И.Брылевская [2].

В космологии XX века *пространству* Вселенной приписывается положительная кривизна, иными словами, пространство считается эллиптическим (его также называют римановым), или сферическим, если значение кривизны есть величина постоянная.

В рамках геометрии, называемой евклидовой, или параболической, “пространства” с числом измерений два (поверхности) могут обладать любой кривизной: положительной и отрицательной, переменной и постоянной. Только пространству трех измерений (трехмерному) приписывается нулевая кривизна ([12], с. 45-46).

Для математика поверхность – это двумерное пространство. Упоминая о поверхностях с постоянной положительной, либо отрицательной кривизной, Пуанкаре утверждает, что геометрия первых “...сводится к сферической геометрии, которая есть геометрия Римана”. О вторых Пуанкаре пишет: “Бельтрами показал, что геометрия этих поверхностей есть не что иное, как геометрия Лобачевского. Таким образом, геометрии двух измерений, как Римана, так и Лобачевского, оказываются связанными с евклидовой геометрией” ([9], с.35). Они являются идеализацией поверхностей разнообразных тел, существующих в природе. При этом сферическая геометрия известна астрономам с древнейших времен, прежде всего, как геометрия “небесной сферы”. Законы этой геометрии, например, зависимости между элементами сферических треугольников, принято выводить из соотношений геометрии Евклида, уже усвоенных учащимися, что свидетельствует не только о связи, но и об отсутствии противоречий между “планиметрией Римана” *¹ и евклидовой геометрией трех измерений.

Чтобы искривилась линия, необходима хотя бы плоскость, а для линии двойкой кривизны – пространство; чтобы искривилась поверхность, необходимо пространство, а чтобы трехмерное пространство искривилось, необходимо пространство четырех измерений, и так далее математики могут продолжать до бесконечности.

Обоснованием искривленности **пространства Вселенной** служит аналогия, получившая распространение благодаря Клиффорду ([5], с.256-261). Клиффорд утверждал, что двумерное существо,двигающееся по однородной искривленной поверхности (например, по сфере), не смогло бы установить, является его “пространство” бесконечным или замкнутым конечным.

Под “пространством” двумерного существа, в природе не существующего, подразумевается бесконечно тонкая сферическая поверхность, она искривлена в наше, трехмерное, пространство. Все реально существующие тела являются трехмерными, поэтому наше пространство, если оно замкнуто и конечно, должно быть искривлено в воображаемом пространстве с четырьмя измерениями. Последовательно проводя аналогию Клиффорда, придется заключить, что, как и у воображаемого двумерного существа, обитающего в бесконечно тонкой сфере, у нас, трехмерных существ, не оказалось бы возможности обнаружить (измерить), искривлено ли наше пространство, если бы оно было однородно и с постоянной кривизной.

При этом не учитывается, что пространство неотделимо от тел, в том смысле, что его нельзя было бы измерить, если бы не существовало тел, заполняющих пространство настолько неравномерно, что принято говорить об иерархическом строении Вселенной ([15], с. 442).

Эйнштейн в ([16], с 91) проводит ту же аналогию, что и Клиффорд. Поскольку в ней рассматриваются объекты (тела или существа), в природе отсутствующие, двумерные и четырехмерные, правомерность ее применения к природе далеко не очевидна. Проблематично также и существование явлений, которые могли бы, хоть косвенно, свидетельствовать о четвертом измерении.

Идея четырехмерного пространства не воспринималась серьезно ни Э.Махом, считавшим четвертое измерение полезным для спиритических сеансов ([7], с. 412-413), ни А.Пуанкаре, который уделил доказательству трехмерности нашего пространства достаточно места в ([9], например, с. 184-185, 198-200, 430-449), в частности, указывая на его удобство для нас – существ трехмерных.

Итак, “прообразами” всех геометрий двух измерений были поверхности разнообразных природных тел. Но как связать с Природой, *неевклидовы геометрии трех и более измерений*? На этот вопрос в ученой среде XIX – XX веков не было единого мнения.

II. Многозначность понятий “пространство” и “измерение”

Остановимся на нескольких значениях слова “пространство”. В современной математике одномерное пространство – это линия, двумерное – поверхность, трехмерное – пространство в собственном (начальном) значении слова. Для изучения движений тел в пространстве вводятся системы координат с тремя координатными осями. Можно назвать время четвертой координатой, ввести фазовое шестимерное пространство координат и скоростей, но это не изменит того факта, что **для определения или измерения положения тела в пространстве необходимы три координаты** – это либо тройка декартовых координат, либо две сферические координаты и расстояние – всегда три числа.

Пуанкаре популярно объясняет многозначность понятия “пространство” в математике, где это слово может употребляться в значении *множества, или многообразия* с любым числом “*измерений*”, т.е. параметров, свойств. Современные математики часто имеют дело с такими пространствами – многообразиями. Например, В.В.Трофимов и А.Т.Фоменко пишут, что “...любое риманово многообразие можно рассматривать как некую многомерную поверхность в многомерном евклидовом пространстве” [10]. Число измерений, или “мерность” при этом означает число параметров, свойств многообразия. Слово измерение, как видим, выступает здесь в ином значении, нежели ось координат.

Пуанкаре уделяет достаточно внимания новой науке – топологии, качественной геометрии, созданной для исследования свойств непрерывности, континуума. “Эта непрерывность обладает известным числом свойств, *свободных от всякой идеи измерения* (курсив наш). Исследование этих свойств составляет предмет науки, разработанной несколькими великими геометрами, в особенности Риманом и Бетти, и получившей название *Analysis Situs*. В этой науке отвлекаются от всякой количественной идеи...” ([9], с.183-184). Во избежание двусмысленности необходимо подчеркнуть, что в этих словах Пуанкаре под *измерением* подразумевается действие, заключающееся в отсчете по шкале или иному прибору. Следовательно, в *Analysis Situs* рассматриваются *неизмеряемые пространства*.

Кроме пространств качественной геометрии, Пуанкаре пишет об измеряемых пространствах параболической эллиптической и гиперболической геометрий. Астрономы и геодезисты, как и представители любой науки, связанной с измерениями расстояний и определениями любых параметров движений тел или их проекций, имеют дело с измеряемыми пространствами. Рассуждения Эйнштейна относятся к геометрии измеряемого пространства. Эйнштейн полагает, что “она становится и физической наукой, т.к. ее аксиомы содержат в себе утверждения относительно объектов природы, справедливость которых

может быть доказана только опытом” ([16], с.181). Опыт заключается в производстве измерений пространств, математически описываемых с помощью координатных систем.

Сравнение отношения Пуанкаре и Эйнштейна к геометрии пространства Вселенной является темой последующих разделов нашей статьи.

III. Является ли геометрия экспериментальной наукой

Пуанкаре судит о связи геометрии с опытом, исходя из происхождения геометрии Евклида. Он пишет: “Итак, не должны ли мы заключить, что аксиомы геометрии суть истины экспериментальные? Но **над идеальными прямыми или окружностями не экспериментируют; это можно сделать только над материальными объектами** (выделено нами). К чему же относятся опыты, которые служили бы основанием геометрии?

Ответ ясен. Выше мы видели, что рассуждения ведутся постоянно так, как если бы геометрические фигуры были подобны твердым телам. Следовательно, вот что заимствовала геометрия у опыта: свойства твердых тел” ([9], с.40).

Пуанкаре последовательно проводит эту точку зрения и остается верен ей до конца: “...пространство в действительности аморфно; оно рыхлая, лишенная твердости форма, которую можно приложить ко всему; оно не имеет своих собственных свойств. Заниматься геометрией — это значит изучать свойства наших инструментов, т. е. свойства твердого тела” (с.422-423). Он утверждает, что “...идея о движении твердых тел является истинным источником геометрии” (с. 365).

Пуанкаре пишет: “Мы видим, что опыт играет необходимую роль в происхождении геометрии; но было бы ошибкой заключить, что геометрия — хотя бы отчасти — является экспериментальной наукой.

Если бы она была экспериментальной наукой, она имела бы только временное, приближенное — и весьма грубо приближенное! — значение. Она была бы только наукой о движении твердых тел. ... Она имеет своим предметом некие идеальные тела, абсолютно неизменные, которые являются только упрощенным и очень отдаленным отображением реальных тел” (с.53).

Далее следует: “Понятие об этих идеальных телах целиком извлечено нами из недр нашего духа, и опыт представляет только повод, побуждающий нас его использовать” ([9], с.53).

Последние слова можно рассматривать, как дань априоризму Канта. С другой стороны, современного человека опыт, действительно, “побуждает к *использованию* геометрии”, хотя в очень далеком прошлом он побуждал не одно поколение ученых к *созданию* геометрии. Современный человек сначала получает сведения об идеальных, абстрактных понятиях (в частности, о геометрии, об идеальном твердом теле) и лишь затем, постигая историю науки, узнает об опытах (наблюдениях и экспериментах), предшествовавших появлению идеала. В результате для современного человека дух, идеал оказывается первичным, а слово предшествует делу, опыту.

Учитывая историю не только геометрии, но и других математических дисциплин, подведем следующий итог рассуждениям Пуанкаре. Геометрия, рожденная из опытов с почти твердыми телами, перестала теперь быть экспериментальной наукой, поскольку ее применяют на практике уже не с целью проверки законов и их следствий, а, напротив, для того, чтобы опереться на них при сравнении объектов природы с тем идеальным твердым телом, которое полностью определено, или описано формулами и законами евклидовой геометрии. Природные тела **сравниваются** с созданным идеалом — таков **метод** изучения их индивидуальных свойств.

Эйнштейн защищает иную точку зрения. Он пишет: “Ясно, что из системы понятий аксиоматической геометрии нельзя получить никаких суждений о таких реально существующих предметах, которые мы называем практически твердыми телами. Чтобы такого рода суждения были возможны, мы должны лишить геометрию ее формально-логического характера, сопоставив *пустой* (sic! Курсив наш) схеме понятий аксиоматической геометрии реальные объекты нашего опыта” ([16], с.85).

Эйнштейн предлагает различать геометрию “чисто аксиоматическую” и “практическую”. “Вопрос о том, является ли практическая геометрия евклидовой или нет, приобретает совершенно ясный смысл; ответ на него может дать только опыт” (с.85).

Призовем на помощь логику. Поскольку евклидова геометрия, безусловно, признается аксиоматической, может ли она одновременно оказаться иной – практической? Казалось бы, сама постановка вопроса – *разделение геометрий*, предложенное Эйнштейном, – уже исключает возможность их совпадения. Тем не менее, Эйнштейн неоднократно настаивает на необходимости новых опытов для ответа на вопрос, является ли практическая геометрия евклидовой или иной. Если практическую геометрию он представляет себе разделом математики, то она не может не быть аксиоматической. Создано три аксиоматические геометрии, опирающиеся на разные постулаты, поэтому, остается только один выход, а именно, предположить, что Эйнштейн призывает опыт для решения вопроса *о выборе* одной из трех геометрий для описания пространства Вселенной.

Обратимся к другой статье, где Эйнштейн именно так и ставит вопрос: “Какова геометрия мира — евклидова или какая-нибудь другая” (с.180), Эйнштейн сравнивает две точки зрения; первую он приписывает Гельмгольцу, вторую – Пуанкаре. Эйнштейн пишет: “Мы примем первую точку зрения как наиболее отвечающую современному состоянию наших знаний. С этой точки зрения вопрос о применимости или неприменимости евклидовой геометрии приобретает ясный смысл. Евклидова геометрия, как и геометрия вообще, сохраняет характер математической науки, так как вывод ее из аксиом по-прежнему остается чисто логической задачей, но в то же время она становится и физической наукой, так как ее аксиомы содержат в себе утверждения относительно объектов природы, справедливость которых может быть доказана только опытом” (с.181, курсив наш).

Иными словами, по мнению Эйнштейна, “...евклидова геометрия, как и геометрия вообще...” станет не только “логической”, но и “физической наукой”, если ее аксиомы, содержащие в себе утверждения относительно объектов природы, будут подтверждены опытом. Хотя в природе существуют тела, близкие к твердым, но абсолютно твердого тела в природе нет. Поэтому заранее можно сказать, что самые точные опыты над объектами природы не послужат доказательством аксиом Евклида. Как мы уже писали, новые опыты дают исследователю материал для изучения отклонения природных тел от геометрического идеала. Те объекты природы – тела, которые Эйнштейн называет то реальными, то физическими, бесконечно разнообразны, а идеальное твердое тело не является объектом природы. Не будучи тождественно ни с одним из объектов, оно, как мы полагаем, обладает существенным преимуществом перед всеми: оно единственное и уже познано ([14], с.289). Какие же *реальные объекты нашего опыта* (объекты природы) Эйнштейн и его последователи выбрали для опытного подтверждения искомой “практической” или “физической” геометрии пространства Вселенной? Об этом мы напишем в разделе V.

Здесь вернемся еще раз к цитированным выше словам Эйнштейна: “Мы должны лишить геометрию ее формально-логического характера, сопоставив пустой схеме понятий аксиоматической геометрии реальные объекты нашего опыта” ([16], с.85, курсив наш).

При решении любой практической задачи происходит сопоставление понятий математики с **числами, которые являются отношениями**, получаемыми из измерений, производимых с объектами природы, но при этом, вплоть до XX века считалось недопустимым лишать математическую дисциплину (геометрию в том числе) формально-логического характера.

IV. Является ли геометрия точной наукой

На вопрос, вынесенный в заглавие раздела, Пуанкаре, безусловно, отвечал положительно. Он пишет: “Если бы геометрия была опытной наукой, она не была бы точной и должна была бы подвергаться постоянному пересмотру. Даже более того, она немедленно

была бы уличена в ошибке, так как мы знаем, что не существует твердого тела абсолютно неизменного” ([9], с.40).

Отсюда ясно, что геометрия является точной наукой по той причине, что не является точной копией ни одного из объектов природы. Она **отражает общие черты** почти твердых тел, не будучи тождественной ни с одним из них ([8], с.116-119).

Поскольку неевклидовы геометрии лишены внутренних логических противоречий, они стали отраслью математики, и это позволило Пуанкаре написать: “Никакая геометрия не может быть более истина, чем другая, та или иная геометрия может быть только *более удобной*”. Далее он поясняет, почему “...евклидова геометрия есть и всегда будет наиболее удобной”. “Она проще всех других...”. “Она в достаточной степени согласуется со свойствами реальных твердых тел, к которым приближаются части нашего организма и наш глаз и на свойстве которых мы строим наши измерительные приборы” ([9], с.41).

Отсюда видим, что Пуанкаре смотрит на геометрию, как на **метод** исследования. Естественно, исследователь выбирает наиболее удобный метод: понятный и быстро ведущий к цели. Метод должен быть точным, что поможет исследователю найти в изучаемом объекте причину его расхождения с математическим идеалом ([12], с.52).

Заключая часть II, “Пространство”, статьи “Наука и гипотеза”, Пуанкаре пишет: “...наш ум приспособился к условиям внешнего мира, он усвоил себе геометрию, наиболее выгодную для вида. Или, другими словами, наиболее удобную. Но это соответствует нашим выводам, что геометрия не истинна, а только выгодна” ([9], с.62).

Такая формулировка дает основание Эйнштейну, а также некоторым философам и математикам для обвинения Пуанкаре в конвенционализме*².

Мы уже писали выше, что при сравнении двух точек зрения на геометрию Эйнштейн отвергает вторую, приписывая ее Пуанкаре, который, якобы, считает, что “...все содержание геометрии условно” ([16], с. 180). Однако Пуанкаре считает только аксиомы условными соглашениями, причем **не** произвольными, но обусловленными многими причинами, которые он находит в устройстве измерительных приборов, в особенностях наших ощущений, органов зрения и т.п. вплоть до законов видового отбора ([9], с197-217). Мы полагаем, что обращение к истории науки позволило бы дополнить Пуанкаре и дать ответ на вопрос о каждом из постулатов Евклида, почему он был выбран.

Для подтверждения несогласия Эйнштейна с Пуанкаре приведем еще одно высказывание Эйнштейна о пространственно-временном континууме: “...вопрос о том, имеет ли этот континуум риманову или какую-либо другую структуру, является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, а не вопросом соглашения о выборе на основе простой целесообразности” ([16], с.87).

Утверждения Эйнштейна свидетельствуют о том, что он предлагает рассматривать геометрию *не как метод познания, а как свойство* некоего природного образования. Он пишет: “В общей теории относительности пришлось отвергнуть гипотезу о евклидовом характере нашего пространственно-временного континуума: континуум приобрел структуру так называемого пространства Римана” (с. 264). В другой статье, опубликованной с том же году (1929), читаем: “Концепция пространства и времени видоизменяется еще больше в общей теории относительности, так как эта теория отрицает, что пространственное сечение пространственно-временного континуума является евклидовым” (с.240).

Ранее, в 1921 г. Эйнштейн писал: “Мы не можем искать причины, по которой некоторые состояния движения имеют преимущества перед всеми другими, в телах, с которыми мы имеем дело, или в самом понятии движения; напротив, это преимущество следует рассматривать как *независимое свойство* пространственно-временного континуума” ([16], с.43, курсив наш).

Итак, у Эйнштейна две точки зрения: пространственно-временной континуум, или его пространственное сечение (т.е. пространство) обладает независимыми геометрическими свойствами, с другой стороны, необходима опытная проверка этих свойств на объектах

природы. В последнем случае, эти свойства выявляются из **взаимодействия**, т.е. являются зависимыми.

Указанные выше континуумы он считает природными образованиями. Однако можно ли признать *природным* образованием упомянутый континуум (x,y,z,t) или его сечение (x,y,z) ? Системы координат и времени устанавливаются астрономами на основе многих измерений относительных положений тел или их проекций, а также **целесообразных** соглашений, **целью** же создаваемых астрономами системы времени и разных координатных систем является изучение движений тех или иных тел. Природными образованиями такие “континуумы”, заведомо, не являются. Над чем же следует проводить опыты, что наблюдать, чтобы выбрать “геометрию пространства Вселенной”?

В.Гейзенберг поясняет положение дел таким образом: “С точки зрения современной науки мы бы сказали, что пустое пространство между атомами Демокрита – это не ничто; оно является носителем геометрии и кинематики и делает возможным порядок и движение атомов” ([3], с.32).

Увы, невозможны эксперименты с *пустым* пространством, и даже нельзя его наблюдать! Может быть, физики надеются на основе порядка и движения атомов или иных представителей микромира, например фотонов, *проверить* свойства, приписываемые ими пространству? Но порядок (положения и движения) любых объектов определяются относительно координатных систем, а построить (создать) систему отсчета координат, опираясь на аморфное (даже не пустое) пространство невозможно.

V. Геометрия для измерения пространства Вселенной и гипотезы о “поведении” световых лучей

Для ответа на вопрос о “геометрии пространства” Пуанкаре не призывает опыта. Он неоднократно подчеркивает: “Опыты относятся не к пространству, а к телам” ([9], с. 60). “Опыты обнаруживают только взаимные отношения тел; никакой опыт не даст и не может дать указаний об отношениях тел к пространству или о взаимных отношениях различных частей пространства” (с. 58). Добавим к этому, что опыты – наблюдения и измерения – относятся также к проекциям тел и что на фундаменте геометрии Евклида построены классическая кинематика, динамика и физика ([8], с.116-119).

Можно ли для пространства выбирать иную геометрию, чем та, которая принята для движущихся в нем тел? Некоторые математики не исключали такой возможности и допускали, что точность астрономических наблюдений пока недостаточна для решения вопроса о геометрии пространства Вселенной (об этом в [14], с.287 и [11], с. 33).

Такая точка зрения была удобна космологам XX века — им можно было не заботиться об опытном подтверждении своих гипотез. Несмотря на существенное пополнение армии космологов в XX веке, никто из них не попытался определить значение кривизны пространства Вселенной. Космологи довольствовались ссылкой на слова Эйнштейна: “Из последних результатов теории относительности представляется вероятным, что наше трехмерное пространство является приближенно сферическим, т.е. что законы расположения в нем твердых тел определяются не евклидовой геометрией, а приближенно описываются сферической геометрией, *если только рассматривать области достаточно большой протяженности*” (с.91, курсив наш). О зависимости геометрии от размеров пространственно-временной области: риманова геометрия – для большой и евклидова – для малой области, Эйнштейн пишет также в ([16], с.87).

Мы снова вынуждены вернуться к уже упомянутому противоречию. С одной стороны, Эйнштейн рассматривает геометрию как *независимое* свойство пространства и утверждает, что “... аксиомы – свободные творения человеческого разума”. “Все остальные теоремы геометрии являются логическими свойствами этих аксиом (не имеющих реального прообраза)” ([16], с.84). Тогда нужно ли искать аксиомам опытное подтверждение? Если создать теорию, опирающуюся на произвольные аксиомы о свойствах пространства, и к тому

же лишить ее формально-логического характера, к чему призвал Эйнштейн (см. раздел III), то и следствия “теории” окажутся не менее произвольными, чем аксиомы. Фактически будут отвергнуты **все** критерии научности (отсутствие логических противоречий, проверка следствий теории на практике), принятые в естествознании с тех пор, как оно перестало быть служанкой теологии.

Надо признать, что, значительно чаще, Эйнштейн *настаивал на необходимости опытной проверки аксиом*, на том, что опыт над объектами природы должен дать ответ на вопрос о геометрических свойствах, или о структуре пространства. Многие из его утверждений в этом духе мы цитировали выше.

В этой связи мы напомним об известных обращениях к опыту, с целью ответа на вопрос о геометрии пространства Вселенной.

Автор гиперболической геометрии Лобачевский еще в 20-е годы XIX века пытался “распространить” свою геометрию на межзвездное пространство, надеясь обнаружить в космосе подтверждение одного из следствий своей геометрии, согласно которому сумма углов треугольника меньше 180° на величину, называемую дефектом треугольника. Из анализа измеряемых астрономами годовых параллаксов звезд Лобачевский пытался определить верхнюю границу гипотетической кривизны пространства, функционально связанную с дефектом. Вычисления Лобачевского не могли привести к желаемому результату, и он назвал свою геометрию воображаемой [2,4].

Опыт звездной астрономии и астрометрии, благодаря прогрессу в точности измерения малых углов, доказал несостоятельность гипотезы Лобачевского о существовании предельного значения для звездных параллаксов. Гипотезе о положительной кривизне пространства, откуда следовало бы, что оно является сферическим (римановым), также не нашлось опытного подтверждения. При положительной кривизне пространства должны появиться отрицательные значения годовых параллаксов звезд. Однако если результат обработки наблюдений приводил к отрицательному значению параллакса, то это значение оказывалось следствием либо ошибки измерения, либо неудачного выбора опорных звезд, среди которых обнаруживалась одна или несколько звезд, более близких, чем звезда определяемая.

Считается, что к концу XX века точность измерений выросла на два порядка. По мере уменьшения измеряемых значений звездных параллаксов, увеличивалась протяженность пространства, доступного для точных геометрических методов определения расстояний, но *одновременно с этим должно уменьшаться значение гипотетической кривизны, как положительной, так и отрицательной*. Это следует из функциональной связи параллаксов с кривизной пространства в неевклидовых геометриях ([13], с.286), которая не должна была бы ускользнуть от внимания математиков.

Для определения расстояний до звезд требуется решить треугольник, в котором известны (измеряемы) только три элемента – базис и два угла. При введении дополнительного неизвестного, кривизны, задача становится недоопределенной, не решается. Поэтому евклидова геометрия, как была, так и всегда будет **методом** определения расстояний во Вселенной, ибо использование неевклидовых геометрий не только неудобно, о чем пишет Пуанкаре, но и невозможно без привлечения гипотетического значения кривизны пространства, которую никто не сможет определить. Необходимость евклидовой геометрии в качестве основы для распространения шкалы расстояний на объекты, столь далекие, что их параллаксы в нашу эпоху исчезающе малы и определяются другими методами, предопределяет зависимость от евклидовой геометрии характеристик движения всех (даже самых далеких) небесных объектов в пространстве: скоростей, ускорений и других производных расстояния по времени.

Итак, развитие звездной астрономии и астрометрии в течение века после Пуанкаре, подтверждает его мнение о том, что “евклидовой геометрии нечего бояться новых опытов” ([9], с.54). Опыты не являются наблюдениями аморфного пространства, они заключаются в измерении углов между проекциями тел, или направлениями на их видимые места.

Мы полагаем, что принятым в астрономии методам перехода от относительных положений **проекции тел** на сфере неопределенного радиуса (“небесной сфере”) к положениям **тел** в пространстве — переходу от “картины к строению” — физики до сих пор не уделили должного внимания. Отсюда, в частности, произошло ошибочное мнение физиков, будто астрономы при определении звездных расстояний не могут обойтись без гипотезы о прямолинейности световых лучей.

Это мнение разделял и Пуанкаре. Он полагал, что “метрическая геометрия есть изучение твердых тел, а проективная геометрия—изучение света” (с.40). Он пишет: “То, что астрономы называют прямой линией, есть просто траектория светового луча” ([9], с.54). Эйнштейн полагал, что распространение света по прямой линии является опытным законом “практической геометрии” ([16], с.85), при этом он считал, что при обнаружении искривления луча придется признать пространство псевдоримановым.

Пуанкаре в этом вопросе придерживался иной точки зрения. “Если, сверх ожидания, удалось бы открыть отрицательные параллаксы или доказать, что все параллаксы больше известного предела, то представлялся бы выбор между двумя заключениями: мы могли бы или отказаться от евклидовой геометрии, или изменить законы оптики и допустить, что свет распространяется не в точности по прямой линии.. Бесполезно добавлять, что всякий счел бы второе решение более удобным^{*3}. Таким образом, евклидовой геометрии нечего опасаться новых опытов”([9], с.54).

В действительности, астрономы не отождествляют идею прямой с лучом света. В метрической геометрии прямая линия определяется как кратчайшее расстояние между двумя точками. В проективной, или изобразительной геометрии идее прямой линии соответствует **направление на светило**. Здесь используется способность нашего зрения видеть источник света по, так называемому, “лучу зрения”. **Направления на светила (орты в математике) искривленными быть не могут**. Этим и обеспечивается возможность нахождения расстояния (кратчайшего, т.е. по прямой) на основе евклидовой геометрии по трем измеренным элементам плоского треугольника^{*4}. В работах [13,14] показано, что астрономы не используют гипотезу о прямолинейности светового луча до тех пор, пока выражают расстояния в тех же единицах длины, в которых измерен базис треугольника – большая ось земной орбиты, т.е. в парсеках, километрах или в астрономических единицах. Звездное расстояние, выводимое из решения треугольника, является **отношением** расстояния “звезда-наблюдатель” к известному базису.

В том случае, когда необходимо популярно объяснить, как велики те расстояния, которые доступны непосредственным измерениям астрономов, их значения переводят из указанных выше единиц *в световое время* (годы, сотни лет и т.д.); в этом случае используется значение скорости света, полученной *в других опытах*. Поясним на простом примере.

В туристских схемах часто указывают расстояния между пунктами переходов не в километрах, а в часах и долях часа, исходя из скорости пешехода. Проверить правильность указаний (или перевода километров в часы) можно на практике, поскольку пешеходы не раз отмечали по часам время своих переходов. Но **никто не может замерить время путешествия света от звезды до наблюдателя**, однако, его можно вычислить по найденному значению параллакса, если известна скорость света.

Современные астрономы используют значение скорости света, полученное физиками в лабораторных условиях. Принято считать, что радарные наблюдения в 60-е годы XX века показали удовлетворительность принятого значения скорости света в вакууме также и для области Солнечной системы.

Итак, если расстояние до звезды выражено в световом времени — это означает, что условия, выполняющиеся в пределах Солнечной системы, *распространяются* на межзвездную среду, где практическая проверка пока невозможна. Физик, который допускает иную гипотезу о поведении света в межзвездной среде, останется надолго застрахованным от ее проверки опытным путем. Однако ситуация не была бы безнадежной для физика, если бы

он изучил влияние межзвездной среды на поведение лучей, создал бы теорию света, дал бы однозначное определение, что такое луч света. Вряд ли, могут этим похвастаться рассуждающие о непреодолимом дуализме – о корпускулярной или волновой “природе света”.

Архиреволюционная идея изучения движений тел, будь то планеты, звезды и т.д., опираясь на мировую линию фотона или другого представителя микрометра, изложенная, например, в монографии [6], не вызывает энтузиазма у астрономов, убежденных, что не следует опираться на то, что менее всего изучено, и вводить в результаты измерений поправки, зависящие от гипотез.

К тому же, попытка установить, “какова геометрия мира – евклидова или какая-нибудь другая”([16], с.180), опираясь на опыты с лучами света, приводит к следующему парадоксу. Лучи исходят из источника света, значит, они, заведомо, не параллельны, заведомо отличаются от параллельных, в метрическом пространстве **не** пересекающихся. Параллельные *сходятся только на картине, т.е. в проективном представлении, или в проективном пространстве* (об этом в [13], с.279-280 и [8], с. 129). Для разрешения парадокса следует обратиться к проективной геометрии.

Заключение

Наиболее существенное различие точек зрения Пуанкаре и Эйнштейна на геометрию заключается в том, что Пуанкаре отстаивает формально-логический характер этой математической дисциплины, тогда как Эйнштейн пытается создать некую “практическую, или физическую геометрию”, считая возможным лишить ее формально-логического характера. Если лишить геометрию формально-логического характера, то она перестанет быть отраслью математики.

Будучи математиком, Пуанкаре много сделал для объяснения новых отраслей геометрии, получивших развитие в XIX веке. Признавая происхождение геометрии Евклида из опыта изучения твердых тел и отсутствие идеального твердого тела в Природе, Пуанкаре, тем не менее, не считает необходимым подвергать геометрию Евклида экспериментальной проверке. **На современную геометрию Пуанкаре смотрит как на точный математический метод**, оставляя за исследователем право выбора из созданных трех геометрий той, которая проще и быстрее ведет к цели исследования. Он отдает предпочтение геометрии Евклида применительно к нашему трехмерному (sic!) пространству не только потому, что она простейшая, но и потому, что она связана с устройством измерительных приборов, строением глаза, с опытами; Пуанкаре подчеркивает, что все опыты относятся не к пространству, а к движущимся в нем телам.

Эйнштейн полагает, что геометрия должна описывать свойства “реальных объектов нашего опыта”: геометрия Евклида приблизительно описывает свойства “реальных твердых тел”, риманова, или псевдориманова геометрия приблизительно описывает свойства “пространственно-временного континуума или его пространственного сечения”. Он надеется, что кривизна обнаружится, когда будут рассматриваться области достаточно большой протяженности. В разделе V и работах [11-14] показана ошибочность этого мнения.

Астрономам и геодезистам известно, что, в отличие от “реальных твердых тел”, ни один из двух упомянутых континуумов не является природным образованием, поскольку они сами создают (или “строят”) системы координат и времени. “Реальным объектом нашего опыта” может быть излучение, свет. Эйнштейн полагает, что изучение “поведения лучей” позволит судить о геометрических свойствах пространства.

Почему об искривлении пространства трех измерений свидетельствует искривление луча, если луч признается олицетворением линии – пространства одного измерения, куда искривлено пространство Вселенной, каково значение его кривизны? На все эти вопросы и через десятки лет после Эйнштейна его сторонники не дали ответа. Они предпочли развивать

учение Эйнштейна, усложняя *свойства* пространственно-временного континуума и *свойства* Вселенной. Престиж академической науки способствовал продвижению их идей о путешествии к звездам по каналам четвертого измерения, путешествии во времени, и о других чудесах Вселенной с расширяющимся пространством, не только в средства массовой информации, но и в учебники астрономии. Такая легко усваиваемая информация вытесняла из учебников не без труда постигавшиеся учащимися **методы** построения систем отсчета времени и координат.

Примерно сто лет прошло со дня публикации работ Пуанкаре, посвященных научному творчеству и развитию науки. В 1904 году Пуанкаре предупреждал о признаках серьезного кризиса в физике ([9], с.233). Из развития кризиса можно было извлечь уроки. Если сегодня мы что-то видим яснее, чем видел Пуанкаре, то этому способствовал не только дополнительный вековой опыт астрометрии, геодезии и звездной астрономии, но и знакомство с работами великого математика Франции, посвященными геометрии.

В заключение мы выражаем благодарность Марии Ивановне Юркиной за внимание к работе и полезные советы, которые мы ушли.

Примечания

*1. Математики называют поверхность, как плоскую, так и искривленную, двумерным пространством, тогда по аналогии с планиметрией Евклида, допустимо назвать двумерную геометрию Римана, планиметрией Римана.

*2. Обвинения Пуанкаре в конвенционализме (в том, что критерий истины он усматривает не в подтверждении опытом, а подменяет его соглашением на основе удобства) можно встретить у физиков и философов (см., например [1], с.102 и 324). Опыт, действительно, является началом всех начал, но ничего, кроме изумления, не вызвал бы современный геометр, *проверяющий* теорему Пифагора с помощью точных измерений, или *проверяющий* формулу объема шара, например, измеряя объем воды, им вытесненной и т.п. После создания классической динамики, механики не проверяли законы Кеплера, а обнаруженные при измерениях отклонения от них объясняли либо наличием возмущающих тел, либо неточностью измерений, либо искали другие причины, конкретные в каждом отдельном случае.

Идея о том, что все (включая аксиомы) можно проверить, уточняя опыты, импонирует тем, кто склонен к отождествлению науки и Природы, тогда как наука – создание человечества на основе взаимодействия с Природой. Человек каждой эпохи что-то проверяет и на что-то опирается. Не может быть общей для всех времен рекомендации о том, что надо проверять в первую очередь, потому что истина конкретна.

*3. Выбор, о котором пишет Пуанкаре, был уже сделан: при объяснении искривления лучей в атмосфере Земли (затем и других планет), астрономы не изменили геометрию вблизи Земли, но вместе с физиками и метеорологами продолжают изучать влияние среды на “поведение лучей”.

*4. Параллакс звезды (значение угла, не переведенное в линейную меру) заносится в каталоги тригонометрических звездных параллаксов ([13], с. 282). Измеренное значение расстояния соответствует тому месту (сферическим координатам), где звезда находилась столько лет тому назад, сколько потребовалось свету для путешествия от звезды к Земле, иначе говоря, в том направлении, в котором наблюдатель видит проекцию звезды на сферу, звезды (тела) уже нет. Направление, соответствующее положению звезды в момент наблюдения, называемое геометрическим, можно вычислить (см., например, [11], с.38-39).

Литература:

1. Академик Александр Данилович Александров. Ред. Г.М.Идлис, О.А.Ладыженская, 2002, серия “Ученые России”, М., “Наука”, 400 с.
2. Брылевская Л.И. Исследования геометрии пространства Вселенной в работах Лобачевского – В сб.: Астрономия и история науки, 1999, С.-Пб., “Искусство России”, с. 27-31.
3. Гейзенберг В. **Физика и философия. Часть и целое.** 1990, М., “Наука”, 400 с.
4. Идельсон Н.И. **Этюды по истории небесной механики.** 1975, М., “Наука”, с.412-431.
5. Клиффорд В. **Здравый смысл точных наук.** 1910, М., Типогр. Сытина, 344 с.

6. Маррей К.Э. **Векторная астрометрия**. 1986, Киев, “Наукова думка”, 326 с.
7. Махъ Э. **Механика**. 1909, С.-Пб., “Общественная польза”, 448 с.
8. Мурри С.А. К вопросу о месте геометрии в естествознании. – В сб.: Проблемы пространства, времени, движения. 1997, т.1, С.-Пб., “Искусство России”, с.115-131.
9. Пуанкаре А. **О науке**. 1983, Перевод под редакцией Л.С.Понтрягина, М., “Наука”, 560 с.
10. Тимофеев В.В., Фоменко А.Т. – Риманова геометрия, 2003, серия “Современная математика и ее приложения”, т. 76, Геометрия, с.85-262.
11. Толчельникова–Мурри С.А Расстояния во Вселенной и “искривленность” пространства.– В сб.: Астрономия и история науки, 1999, С.-Пб. “Искусство России”, с. 32-43.
12. Толчельникова–Мурри С.А. К критике представлений о неевклидовости Пространства Вселенной. Там же, с. 44-56.
13. Толчельникова С.А. К вопросу о методике определения звездных параллаксов в проекте Стереоскоп-А. – Изв. ГАО, 2002, №216, С.-Пб., РАН, с.278-284.
14. Толчельникова С.А. Евклидова геометрия как метод определения звездных расстояний. –Там же, с.285-290.
15. Толчельникова С.А. Инерциальная система координат и единство сил инерции и тяготения. В сб.: Пространство, время, тяготение, 2003, С.-Пб. “ТЕССА”, с. 437-450.
16. Эйнштейн А. **Собрание сочинений** в 4-х томах. 1965, т. 2, М., “Наука”, 878 с.